Zastosowania całkowania 1

1 Izolator ma kształt linii C o równaniach parametrycznych

$x(\theta) = 5(2\theta - \sin 2\theta)$ oraz $y(\theta) = 10\sin^2\theta$.

Izolator jest ładowany ze stałą liniową gęstością ładunku $\rho = 4\,(\mu\text{C/m})$. Znajdź całkowity ładunek pomiędzy $\theta = 0$ a $\theta = \pi$.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

Odpowiedzi

1 160 μC

Pytanie **Rozwiązanie**

Rozwiązania

1 Ładunek całkowity dany jest jako $Q = \int_C \rho\,\mathrm{d}s = \int_{\theta=0}^{\pi} \rho\,\mathrm{d}s$, gdzie element długości łuku $\mathrm{d}s$ dany jest jako

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Teraz:

$$x'(\theta) = 5(2 - 2\cos 2\theta) = 10(1 - \cos 2\theta),$$
$$y'(\theta) = 20\cos\theta\sin\theta = 10\sin 2\theta.$$

Zatem:

$$\begin{aligned}(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 &= 100(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2\theta) + 100\sin^2\theta \\ &= 100\big(1 - 2\big[1 - 2\sin^2\theta\big] + 1 - \sin^2\theta\big) + 100\sin^2\theta \\ &= 400\sin^2\theta\end{aligned}$$

i konsekwentnie:

$\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2} = 20\sin\theta$, dając element długości łuku $\mathrm{d}s = 20\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Ostatecznie obliczamy ładunek całkowity:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\pi} \rho\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\pi} 80\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 80\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} \\ &= 80\,\big(\,1\;\;-(-1)\big) \\ &= 160\ \mu\mathrm{C}. \end{aligned}$$

Pytanie **Odpowiedź**
